



"(...) al concebir una nueva forma de registrar verdades matemáticas y exponerlas para su uso, es probable que nos inspiren nuevas perspectivas que, de nuevo, deben reaccionar en el aspecto más teórico del asunto. Todas las extensiones del poder humano, o incrementos del conocimiento humano, conllevan siempre varias influencias colaterales, además del objetivo principal obtenido."



La copia comparte cultura.



# > NOTA G

BOSQUEJO DE LA MÁQUINA ANALÍTICA

Ada Lovelace





NOTA G

Bosquejo de la Máquina Analítica

Ada Lovelace



*"Nota G, bosquejo de la máquina analítica" de Ada Lovelace, forma parte de las notas que integran la traducción realizada por Ada Lovelace al texto de Luigi Menabrea. La traducción fue publicada en 1843.*

Traducción, edición y diagramación por Colectivo Disonancia, 2021



colectivodisonancia.net  
@cdisonancia



La copia comparte cultura.

**Puedes descargar el Fanzine aquí:**

<https://colectivodisonancia.net/zines>

<https://cloud.disroot.org/s/ezoecDQFdBdwCzy>

<https://gitlab.com/cdisonancia/zines>



Esta obra está bajo  
Licencia de Producción de Pares

## LICENCIA PRODUCCIÓN DE PARES

ERES LIBRE DE COPIAR Y DISTRIBUIR ESTE MATERIAL CON LAS SIGUIENTES CONDICIONES:

- \* Atribución: dar reconocimiento a la autoría y la edición de la obra.
- \* Compartir bajo misma licencia: si se crea una obra derivada de esta, debe tener esta misma licencia.
- \* No Capitalista: este obra solo puede ser comercializada por organizaciones de trabajadores autogestionados, cooperativas, organizaciones y colectivos sin fines de lucro en donde no existan relaciones de explotación laboral.

Licencia completa

[https://endefensadelsl.org/ppl\\_es.html](https://endefensadelsl.org/ppl_es.html)

**Descarga este fanzine en:**

- <https://colectivodisonancia.net/zines>
- <https://cloud.disroot.org/s/ezoecDQFdBdwCzy>
- <https://gitlab.com/cdisonancia/zines>

***O accediendo al enlace en este QR***



*Nota G, bosquejo de la máquina analítica* es una de las anotaciones que Ada Lovelace incluyó en su traducción del texto de Luigi Menabrea que describía la máquina analítica de Charles Babbage (1842). Publicada en 1843, la traducción de Ada no sólo explica detalles del motor analítico, sino que también reflexiona sobre sus posibilidades dentro del campo de la ciencia y la técnica. Esta nota posee un valor particular, puesto incluye el primer algoritmo de programación complejo.

Debido al contexto del desarrollo tecnológico en la Inglaterra industrial del siglo XIX y, a su vez, por la hegemonía patriarcal que excluía a las mujeres del centro intelectual, el trabajo de Ada no fue reconocido en el momento de su publicación. Hoy es posible rescatar su propuesta y considerar no sólo los elementos técnicos que postula, sino además su valor epistemológico y político.

*Colectivo Disonancia,  
Marzo, 2021*

Numbers of Bernoulli. See Note G. (page 722 *et seq.*)

[illegible]



Diagram for the computation by the Engine of the

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Data.					
						$1V_1$ ○ 0 0 1	$1V_2$ ○ 0 0 2	$1V_3$ ○ 0 0 4	$0V_4$ ○ 0 0 0	$0V_5$ ○ 0 0 0	$0V_6$ ○ 0 0 0
						1	2	n			
1	×	$1V_2 \times 1V_3$	$1V_4, 1V_5, 1V_6$	$\begin{cases} 1V_2 = 1V_2 \\ 1V_3 = 1V_3 \\ 1V_4 = 2V_4 \\ 1V_5 = 1V_5 \\ 1V_6 = 2V_6 \end{cases}$	$= 2n \dots\dots\dots$	...	2	n	2n	2n	2n
2	-	$1V_4 - 1V_1$	$2V_4 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_4 = 2V_4 \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= 2n - 1 \dots\dots\dots$	1	...	...	2n - 1	...	...
3	+	$1V_5 + 1V_1$	$2V_5 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_5 = 2V_5 \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= 2n + 1 \dots\dots\dots$	1	...	...	...	2n + 1	...
4	+	$2V_5 + 2V_4$	$1V_{11} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_5 = 0V_5 \\ 2V_4 = 0V_4 \end{cases}$	$= \frac{2n-1}{2} \dots\dots\dots$	...	...	...	0	0	...
5	+	$1V_{11} \div 1V_2$	$2V_{11} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_{11} = 2V_{11} \\ 1V_2 = 1V_2 \end{cases}$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \dots\dots\dots$	...	2	...	...	...	...
6	-	$0V_{13} - 2V_{11}$	$1V_{13} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_{11} = 0V_{11} \\ 0V_{13} = 1V_{13} \end{cases}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
7	-	$1V_3 - 1V_1$	$1V_{10} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_3 = 1V_3 \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= n - 1 (= 3) \dots\dots\dots$	1	...	n	...	...	...
8	+	$1V_2 + 0V_7$	$1V_7 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_2 = 1V_2 \\ 0V_7 = 1V_7 \end{cases}$	$= 2 + 0 = 2 \dots\dots\dots$	...	2	...	...	...	...
9	+	$1V_6 + 1V_7$	$3V_{11} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_6 = 1V_6 \\ 0V_{11} = 3V_{11} \end{cases}$	$= \frac{2n}{2} = A_1 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	2n
10	×	$1V_{21} \times 3V_{11}$	$1V_{12} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_{21} = 1V_{21} \\ 3V_{11} = 3V_{11} \end{cases}$	$= B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
11	+	$1V_{12} + 1V_{13}$	$2V_{13} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_{12} = 0V_{12} \\ 1V_{13} = 2V_{13} \end{cases}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2} \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
12	-	$1V_{10} - 1V_1$	$2V_{10} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_{10} = 2V_{10} \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= n - 2 (= 2) \dots\dots\dots$	1	...	...	...	...	...
13	{	$-1V_6 - 1V_1$	$2V_6 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_6 = 2V_6 \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= 2n - 1 \dots\dots\dots$	1	...	...	...	...	2n - 1
14		$+1V_1 + 1V_7$	$2V_7 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_1 = 1V_1 \\ 1V_7 = 2V_7 \end{cases}$	$= 2 + 1 = 3 \dots\dots\dots$	1	...	...	...	...	...
15		$+2V_6 + 2V_7$	$1V_8 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_6 = 2V_6 \\ 2V_7 = 2V_7 \end{cases}$	$= \frac{2n-1}{3} \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	2n - 1
16		$\times 1V_8 \times 3V_{11}$	$4V_{11} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_8 = 0V_8 \\ 3V_{11} = 4V_{11} \end{cases}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
17	{	$-2V_6 - 1V_1$	$3V_6 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_6 = 3V_6 \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= 2n - 2 \dots\dots\dots$	1	...	...	...	...	2n - 2
18		$+1V_1 + 2V_7$	$3V_7 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_7 = 3V_7 \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= 3 + 1 = 4 \dots\dots\dots$	1	...	...	...	...	...
19		$+3V_6 + 3V_7$	$1V_9 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 3V_6 = 3V_6 \\ 3V_7 = 3V_7 \end{cases}$	$= \frac{2n-2}{4} \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	2n - 2
20		$\times 1V_9 \times 4V_{11}$	$5V_{11} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_9 = 0V_9 \\ 4V_{11} = 5V_{11} \end{cases}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = A_3 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
21	×	$1V_{22} \times 5V_{11}$	$0V_{12} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_{22} = 1V_{22} \\ 0V_{12} = 2V_{12} \end{cases}$	$= B_3 \cdot \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = B_3 A_3 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
22	+	$2V_{12} + 2V_{13}$	$3V_{13} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_{12} = 0V_{12} \\ 2V_{13} = 3V_{13} \end{cases}$	$= A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_3 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
23	-	$2V_{10} - 1V_1$	$3V_{10} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 2V_{10} = 3V_{10} \\ 1V_1 = 1V_1 \end{cases}$	$= n - 3 (= 1) \dots\dots\dots$	1	...	...	...	...	...
Here follows a repetition											
24	+	$4V_{13} + 0V_{24}$	$1V_{24} \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 4V_{13} = 0V_{13} \\ 0V_{24} = 1V_{24} \end{cases}$	$= B_7 \dots\dots\dots$	...	...	...	...	...	...
25	+	$1V_1 + 1V_3$	$1V_3 \dots\dots\dots$	$\begin{cases} 1V_1 = 1V_1 \\ 1V_3 = 1V_3 \end{cases}$	$= n + 1 = 4 + 1 = 5 \dots\dots\dots$	1	...	n + 1	...	...	0
				$\begin{cases} 5V_6 = 0V_6 \\ 5V_7 = 0V_7 \end{cases}$	by a Variable-card. by a Variable card.						

Conviene evitar la posibilidad de que surjan ideas exageradas en cuanto a las capacidades del motor analítico. Al considerar cualquier asunto nuevo, suele aparecer una tendencia, en primer lugar, a sobrevalorar lo que nos parece ya interesante o notable y, en segundo lugar, por una especie de reacción natural, a infravalorar el verdadero estado del asunto, cuando descubrimos que nuestras nociones han superado lo que realmente podíamos sostener.

El motor analítico no tiene ninguna pretensión de producir nada nuevo. Puede hacer cualquier cosa que sepamos cómo ordenarle que haga. Puede seguir un análisis; pero no tiene la capacidad de anticipar ninguna relación o verdad analíticas. Su labor es ayudarnos a hacer accesible aquello con lo que ya estamos familiarizados. Está diseñada para hacer esto principalmente, por supuesto, por medio de sus facultades ejecutivas; pero es probable que ejerza también una influencia indirecta y recíproca sobre la propia ciencia de otra manera. Porque, al distribuir y combinar las verdades y fórmulas del análisis, de manera que las combinaciones

---

mecánicas de la máquina las puedan manejar con mayor rapidez y facilidad, las relaciones y la naturaleza de muchos temas de la ciencia quedarán expuestas con una nueva luz y podrán investigarse más profundamente. Esto es una consecuencia indirecta y especulativa de tal invento. Sin embargo, es bastante evidente que, en general, al concebir una nueva forma de registrar verdades matemáticas y exponerlas para su uso, es probable que nos inspiren nuevas perspectivas que, de nuevo, deben reaccionar en el aspecto más teórico del asunto. Todas las extensiones del poder humano, o incrementos del conocimiento humano, conllevan siempre varias influencias colaterales, además del objetivo principal obtenido.

Volviendo a las facultades ejecutivas de esta máquina, la pregunta que todas las mentes deben plantearse es: ¿son capaces realmente de seguir el análisis en toda su extensión? No se puede dar respuesta alguna a esta pregunta que satisfaga a todas las mentes, exceptuando la propia existencia del motor y la propia experiencia de sus resultados prácticos. Sin embargo, resumiremos los elementos principales con los que trabaja la máquina, para la consideración de cada lector:

1. Realiza las cuatro operaciones de la aritmética simple con cualquier número.

2. Por medio de ciertos artificios y arreglos (que no podemos abordar con el restringido espacio que admite la presente publicación), no existe límite ni para la magnitud de los números usados ni para el número de cantidades (ya sean variables o constantes) que se pueden emplear.

3. Puede combinar estos números y cantidades, tanto algebraica como aritméticamente, en relaciones ilimitadas en cuanto a variedad, extensión o complejidad.

4. Usa los signos algebraicos de acuerdo a sus leyes apropiadas y desarrolla las consecuencias lógicas de estas leyes.



función que cada uno lleva a cabo en el cálculo es fijo e invariable. Así,  $V_6$  prepara los numeradores de los factores de cualquier  $A$ ;  $V_7$  los denominadores.  $V_8$  siempre recibe el factor en el lugar  $(2n-3)$  de  $A_{2n-1}$ , y  $V_9$  el factor en el lugar  $(2n-1)$ .  $V_{10}$  siempre decide cuál de los dos caminos seguirán los procesos siguientes, a través de una sustracción del valor de  $n$ ; y así con los siguientes; pero no enumeraremos más adelante. Es deseable en todos los cálculos que las funciones llevadas a cabo por las Variables sean lo más fijas y uniformes posibles, para la configuración de los procesos.

Suponiendo que fuera deseado, no solamente tabular  $B_1, B_3, \dots$ , sino también  $A_0, A_1, \dots$ ; entonces solo tenemos que nombrar otra serie de variables  $V_{41}, V_{42}, \dots$ , para recibir aquellos resultados posteriores que sean sucesivamente producidos sobre  $V_{11}$ . O podríamos, en vez de esto o además de esta segunda serie de resultados, querer tabular los valores de cada término total (8.) de las series, es decir,  $A_0, A_1B_1, A_3B_3, \dots$ . Luego solo tenemos que multiplicar cada  $B$  con su  $A$  correspondiente, y ubicar estos productos sucesivos en Columnas Resultantes nombradas para tal fin.

La fórmula (8.) es interesante desde otro punto de vista. Es este caso particular de la integral general de la siguiente ecuación diferencial mixta:

$$\frac{d^2}{dx^2}(z_{n+1}x^{2n+2}) = (2n+1)(2n+2)z_nx^{2n}$$

para ciertas suposiciones especiales respecto a  $z, x$  y  $n$ .

La integral general tiene la forma,

$$z_n = f(n) \cdot x + f_1(n) + f_2(n) \cdot x^{-1} + f_3(n) \cdot x^{-3} + \dots$$

y es digno de destacar que la máquina podría (de una forma más o menos similar a la anterior) calcular el valor de esta fórmula además de la mayoría de las otras hipótesis sobre las funciones en la integral con tanta (o quizás mayor) facilidad que con la fórmula (8.).

**A.A.L**

5. Puede sustituir cualquier fórmula por otra, arbitrariamente; eliminando la primera de ellas de la columna en la que está representada y colocando la segunda en su lugar.

6. Puede entregar valores singulares. El señor Menabrea alude a esta capacidad en sus memorias, donde menciona el paso de valores de cero a infinito. La posibilidad de hacer que cambie sus procesos arbitrariamente en cualquier momento, ante la eventualidad de cualquier contingencia especificada (la sustitución de  $(\frac{1}{2} \cos \overline{n+1}\theta + \frac{1}{2} \cos \overline{n-1}\theta)$  por  $(\cos n\theta \cdot \cos \theta)$ , explicada en la Nota E, ilustra esto de cierta forma), asegura este punto de inmediato.

El tema de la integración y la diferenciación exige atención. El motor puede efectuar estos procesos de dos maneras distintas:

Primero. Podemos ordenarle, por medio de las tarjetas de Operación y de Variable, que siga los diversos pasos mediante los cuales se puede calcular el límite requerido para cualquier función que se esté considerando.

En segundo lugar. Puede efectuar la integración o diferenciación por sustitución directa (si conocemos la forma del límite de la función en cuestión). En la Nota B, comentamos que cualquier conjunto de columnas en los que se inscriben números representa simplemente una función general de las diversas cantidades, hasta que la función especial quede impresa por medio de las tarjetas de Operación y Variable. Por ende, si en lugar de solicitar el valor de la función, solicitamos el de su integral o el de su coeficiente diferencial, solo tenemos que ordenarle la combinación particular de las cantidades ingredientes que constituya esa integral o ese coeficiente. En  $ax^n$ , por ejemplo, en lugar de las cantidades

$$\underbrace{\begin{matrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 \\ [a] & [n] & [x] & [ax^n] \end{matrix}}_{ax^n}$$

para que aparezcan en  $V_3$  en la combinación  $ax^n$ , se ordenarían para que aparecieran en la de  $anx^{n-1}$

Entonces quedarían así:

$$\underbrace{\begin{matrix} V_0 & V_1 & V_2 \\ [a] & [n] & [x] \end{matrix}}_{anx^{n-1}} \begin{matrix} V_3 \\ [anx^{n-1}] \end{matrix}$$

Del mismo modo, podríamos tener  $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$ , la integral de  $ax^n$ .

Un ejemplo interesante para seguir el proceso de la máquina sería la forma

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

o cualquier otro caso de integración por reducciones sucesivas, donde se puede hacer que una integral que contiene una operación repetida  $n$  veces dependa de otra que contiene las mismas  $n-1$  o  $n-2$  veces, y así hasta que, por reducción continua, alcancemos una forma final, cuyo valor hay que determinar luego.

Los métodos del Calcul des Dérivations de Arbogast son especialmente apropiados para la notación y los procesos del motor. Del mismo modo, todo el Análisis Combinatorio, que consiste, primero, en un cálculo de índices puramente numérico y, segundo, en la distribución y combinación de las cantidades según las leyes prescritas por estos índices.

Terminaremos estas Notas siguiendo en detalle los pasos a través de los cuales el motor podría calcular los Números de Bernoulli, siendo esto (en la forma que deduciremos aquí) un ejemplo bastante complejo de sus capacidades. La forma más sencilla de calcular estos números sería mediante la expansión directa de

cualquier B después de  $B_3$ . Este es un número muy cercano a la cantidad exacta utilizada, pero no podemos entrar aquí en las minucias de las pocas circunstancias particulares que ocurren en este ejemplo (Como ocurren normalmente en una u otra etapa de la mayoría de las computaciones) para modificar levemente este número.

Se hará obvio que este mismo número de Tarjetas de Variable (75) se repetirá para el cálculo de cada número subsiguiente, en base al mismo principio que permite que se usen siempre 33 Tarjetas de Variable de las Operaciones (13... 23) en el cálculo de cualquier número. Entonces, debe existir un ciclo de un ciclo de Tarjetas de Variable.

Si ahora aplicamos la notación previa a los ciclos, como se explicó en la Nota E., entonces podemos expresar las operaciones para los cálculos de los Números de Bernoulli de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
 (1 \dots 7), (24, 25) \dots \dots \dots entrega \quad B_1 & = 1er \text{ núm.}; (siendo \ n = 1) \\
 (1 \dots 7), (8 \dots 12), (24, 25) \dots \dots \dots B_3 & = segundo \dots \dots; (n \dots = 2) \\
 (1 \dots 7), (8 \dots 12), (13 \dots 23), (24, 25) \dots \dots \dots B_5 & = tercero \dots \dots; (n \dots = 3) \\
 (1 \dots 7), (8 \dots 12), 2(13 \dots 23), (24, 25) \dots \dots \dots B_7 & = cuarto \dots \dots; (n \dots = 4) \\
 \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\
 (1 \dots 7), (8 \dots 12), \sum (+1)^{n-2} (13 \dots 23), (24, 25) \dots B_{2n-1} & = enésimo \dots \dots; (n \dots = n).
 \end{array}$$

Y nuevamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \dots 7), (24, 25), \sum_{a=1}^n (+1)^n}{1} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \dots 7), (8 \dots 12), \sum_{a=0}^{n+2} (n+2) (13 \dots 23), (24, 25)}{0} \right\}$$

representa las operaciones totales para computar todos los números de la sucesión, de  $B_1$  a  $B_{2n-1}$  incluido.

En esta fórmula podemos ver un ciclo variable de primer orden, y un ciclo ordinario de segundo orden. El segundo ciclo, en este caso, incluye en él al ciclo variable.

Al inspeccionar las diez Variables de Trabajo del diagrama, puede verse que a pesar de que el valor de cualquiera de ellos (exceptuando a  $V_4$  y  $V_5$ ) pasa por una serie de cambios, aunque la

y por cada B sucesor a  $B_5$  habrán 33 Tarjetas de Variable adicionales (Ya que cada repetición del grupo (13... 23) agrega 11 al número de operaciones requeridas para computar los B previos). Debemos explicar ahora, sin embargo, que cada vez que haya un *ciclo de operaciones*, y si estas requieren ser suministradas solo con números del mismo par de columnas, y además que cada operación ponga su resultado en la misma columna para cada repetición del grupo completo, entonces el proceso admite un ciclo de Tarjetas de Variable para efectuar su propósito. Hay, por supuesto, mucha más simetría y simplicidad en los arreglos cuando los casos admiten la repetición de Tarjetas de Variable y de Operación. Nuestro ejemplo presente es de esta naturaleza. La única excepción a una *identidad perfecta* en todos los procesos y columnas utilizados para cada repetición de operaciones (13... 23) es que la Operación 21 siempre requiere que uno de sus factores venga de una nueva columna. Pero mientras estas variaciones siguen la misma ley para cada repetición (La Operación 21 siempre requiriendo su factor de una columna una unidad más avanzada que la utilizada la vez anterior, y la operación 24 siempre poniendo su resultado en una columna una unidad más adelante que aquella que recibió en el resultado previo), son fácilmente provistas mediante el arreglo del grupo (o ciclo) recurrente de Tarjetas de Variable.

Aquí vale la pena remarcar que el estimado promedio de 3 Tarjetas de Variable por cada operación no debe ser tomado como absoluta y literalmente correcto para cada caso y circunstancia. Existen muchas circunstancias especiales, ya sea en la naturaleza del problema o en los arreglos y configuración de la máquina bajo ciertas contingencias, que influyen y modifican este promedio en mayor o menor medida; pero es una regla bastante segura y correcta para guiarse en términos generales. En el caso anterior, nos dará 75 Tarjetas de Variable como número total necesario para computar

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + etc.} \quad (1.)$$

que es de hecho un caso particular del desarrollo de

$$\frac{a + bx + cx^2 + etc.}{a' + b'x + c'x^2 + etc.}$$

mencionada en la Nota E. O, de nuevo, podríamos calcularlos a partir de la conocida forma

$$B_{2n-1} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{(2\pi)^{2n}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right\} \quad (2.)$$

o de la forma

$$B_{2n-1} = \frac{\pm 2^n}{(2^{2n-1})^{2n-1}} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{2} n^{2n-1} \\ + (n-1)^{2n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{1} \right\} \\ + (n-2)^{2n-1} \left\{ 1 + \frac{2n}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} \right\} \\ - (n-3)^{2n-1} \left\{ 1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (3.)$$

o de muchas otras. Sin embargo, como nuestro objetivo no es la simplicidad o facilidad de los cálculos, sino ilustrar el poder de la máquina, preferimos seleccionar la fórmula de abajo, marcada (8.). Es deriva de la siguiente manera:

Si en la ecuación

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2} + B_3 \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + B_5 \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \quad (4.)$$

(en la que  $B_1, B_3 \dots$ , etc. son números de Bernoulli), expandimos el denominador del primer lado en potencias de x y luego dividimos el numerador y el denominador por x, derivaremos

$$1 = \left(1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2} + B_3 \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\right) \quad (5.)$$

Si esta multiplicación del final pudiera hacerse, tendríamos una serie con la forma general

$$1 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \dots \quad (6.)$$

en la que vemos, primero, que todos los coeficientes de las potencias de  $x$  son iguales a cero; y, segundo, que la forma general para  $D_{2n}$ , el coeficiente del término  $2n+1$ th (esto es  $x^{2n}$ , de cualquier potencia par de  $x$ ) es lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot 3 \dots 2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \dots 2n} + \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \dots 2n-1} + \frac{B_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \dots 2n-3} + \\ & + \frac{B_5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \dots 2n-5} + \dots + \frac{B_{2n-1}}{2 \cdot 3 \dots 2n} \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.)$$

Multiplicando todos los términos por  $(2 \cdot 3 \dots 2n)$ , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \left( \frac{2n}{2} \right) + B_3 \left( \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \\ & + B_5 \left( \frac{2n \cdot (2n-1) \dots (2n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right) + \dots + B_{2n-1} \end{aligned} \right\} \quad (8.)$$

que conviene escribir en su forma general:

$$0 = A_0 + A_1 B_1 + A_3 B_3 + A_5 B_5 + \dots + B_{2n-1} \quad (9.)$$

Siendo  $A_1, A_3, \dots$ , etc. esas funciones de  $n$  que pertenecen respectivamente a  $B_1, B_3, \dots$ , etc...

Podríamos haber derivado una forma similar a (8.) desde  $D_{2n-1}$ , el coeficiente de cualquier potencia impar de  $x$  en (6.); pero la forma general es algo diferente para los coeficientes de las potencias impares, y no tan conveniente.

Al examinar (7.) y (8.), podemos percibir que, cuando aislamos estas fórmulas de (6.), a partir de la cual están derivadas, y las consideramos separada e independientemente,  $n$  puede ser cualquier número entero; aunque, cuando (7.) se da como una de las  $D$  en (6.),

Al terminar la repetición de las operaciones (13...23) para calcular  $B_7$ , las alteraciones en los valores de las Variables son

$$V_6 = 2n-4 \text{ en vez de } 2n-2.$$

$$V_7 = 6 \dots \dots \dots 4.$$

$$V_{10} = 0 \dots \dots \dots 1.$$

$$V_{13} = A_0 + A_1 B_1 + A_3 B_3 + A_5 B_5 \text{ en vez de } A_0 + A_1 B_1 + A_3 B_3$$

En este estado, los únicos procesos restantes son, primero, transferir el valor que hay en  $V_{13}$  a  $V_{24}$  y, segundo, reducir  $V_6, V_7, V_{13}$  a cero y sumarle uno a  $V_3$ , para que la máquina esté lista para comenzar a calcular  $B_9$ . Las Operaciones 24 y 25 cumplen estos objetivos. Puede parecer anómalo que la Operación 25 se represente dejando el índice superior de  $V_3$  todavía=unidad; pero debemos recordar que estos índices siempre empiezan de nuevo para cada cálculo independiente, y que la Operación 25 coloca en  $V_3$  el primer valor para el nuevo cálculo.

Debemos comentar que, cuando se repite el grupo (13...23), se producen cambios en algunos de los índice superiores durante el transcurso de la repetición. Por ejemplo,  ${}^3V_6$  se transformaría en  ${}^4V_6$  y  ${}^5V_6$ .

Así, vemos que cuando  $n = 1$ , se utilizan 9 tarjetas de operación; que cuando  $n = 2$ , se utilizan 14 de estas tarjetas; y que cuando  $n > 2$ , entonces 25 tarjetas de operación se utilizan, pero nunca se necesitan más, sin importar qué tan grande sea  $n$ ; y no solo esto, sino que estas mismas 25 tarjetas bastan para la computación sucesiva de todos los números entre  $B_1$  y  $B_{2n-1}$ , incluyendo a este último. Con respecto al número de Tarjetas de Variable, se recordará de explicaciones en anteriores notas, que un promedio de 3 tarjetas de estas por cada operación (y no por cada tarjeta de operación) es la estimación. De acuerdo a esto, la computación de  $B_1$  requerirá 27 tarjetas de variable;  $B_3$  requerirá 42 de estas tarjetas;  $B_5$  requerirá 75;



examinamos, se verá que son regulares y periódicos.

La Tarjeta 12 tiene que realizar la misma función que la que realizó la Tarjeta 7 hizo en la sección anterior; dado que si  $n$  hubiera sido  $=2$ , la operación onceava habría completado el cálculo de  $B_3$ .

Las Tarjetas 13 a la 20 obtienen  $A_3$ . Como  $A_{2n-1}$  siempre consiste en factores,  $A_3$  tiene tres factores; se puede ver que las Tarjetas 13, 14, 15, 16 obtienen el segundo de estos factores y luego lo multiplican por el primero; y que las 17, 18, 19, 20 obtienen el tercer factor y luego lo multiplican por el producto de los dos factores anteriores.

La Tarjeta 23 tiene la función de las Tarjetas 11 y 7, ya que, si  $n$  fuera  $=3$ , las operaciones veintiuno y veintidós vigésimo segunda completarían el cálculo de  $B_5$ . Como nuestro caso es  $B_7$ , el cálculo continuará con otra fase más; y ahora debemos prestar atención a que, para poder calcular  $A_7$ , solo es necesario repetir precisamente el grupo de Operaciones de la 13 a las 20; y luego, para completar el cálculo de  $B_7$ , repetir las Operaciones 21 y 22.

Se puede observar que cada unidad que se suma a  $n$  en  $B_{2n-1}$  conlleva una repetición adicional de las operaciones (13...23) para calcular  $B_{2n-1}$ . No solo son todas las operaciones precisamente las mismas para cada repetición, sino que necesitan recibir los números, respectivamente, de exactamente el mismo par de columnas; solo con la excepción de la Operación 21 que, por supuesto, necesitará  $B_5$  (de  $V_{23}$ ) en lugar de  $B_3$  (de  $V_{22}$ ). Esta identidad de las columnas que proporcionan los números requeridos no debe confundirse con una identidad de los valores que contienen esas columnas y que son alimentados al molino. La mayoría de esos valores reciben alteraciones durante una ejecución de las operaciones (13...23) y, por tanto, las columnas presentan un nuevo conjunto de valores con los que tiene que trabajar la siguiente ejecución de las operaciones (13...23).

es obvio que entonces  $n$  no es arbitrario, sino que es siempre una función de la distancia de esa  $D$  desde el principio. Si esa distancia puede ser  $=d$ , entonces

$$2n + 1 = d, \text{ y } n = \frac{d-1}{2} \text{ (para cualquier potencia par de } x\text{)}$$

$$2n = d, \text{ y } n = \frac{d}{2} \text{ (para cualquier potencia impar de } x\text{)}$$

Es con la fórmula independiente (8.) con la que tenemos que trabajar. Por ende, debemos recordar que las condiciones para el valor de  $n$  quedan ahora modificadas y que  $n$  es un número entero completamente arbitrario. Esta circunstancia, combinada con el hecho (fácilmente perceptible) de que, cualquiera sea el valor de  $n$ , cualquier término de (8.) tras el  $(n+1)$  es  $=0$ , y que el propio término  $(n+1)$  es siempre  $= B_{2n-1} \cdot \frac{1}{1} = B_{2n-1}$ , nos permite hallar el valor (sea numérico o algebraico) de cualquier número de Bernoulli  $B_{2n-1}$  en términos de todos los precedentes, solo con saber los valores de  $B_1, B_3, \dots, B_{2n-3}$ . Hemos anexado a esta nota un diagrama y una tabla con los detalles del cálculo de  $B_7$  ( $B_1, B_3, B_5$  vienen dados).

Al considerar con atención (8.), observaremos también que podemos derivar de ella el valor numérico de cualquier número de Bernoulli sucesivo, desde el principio, *ad infinitum*, mediante la siguiente serie de cálculos:

- Primera serie. —Siendo  $n=1$ , y calculemos (8.) para este valor de  $n$ . El resultado es  $B_1$ .
- Segunda serie. —Siendo  $n=2$ . Calculemos (8.) para este valor de  $n$ , sustituyendo el valor de  $B_1$  que acabamos de obtener. El resultado es  $B_3$ .
- Tercera serie. —Siendo  $n=3$ . Calculemos (8.) para este valor de  $n$ , sustituyendo los valores de  $B_1, B_3$  obtenidos anteriormente. El resultado es  $B_5$ . Y así sucesivamente, hasta cualquier extensión.

El diagrama<sup>1</sup> representa las columnas de la máquina cuando es-

<sup>1</sup> El diagrama se encuentra al final del zine.

tá recién preparada para calcular  $B_{2n-1}$  (en el caso de  $n=4$ ); mientras que la tabla de abajo ofrece una vista completa y simultánea de todos los cambios sucesivos que le ocurren a estas columnas para realizar el cálculo. (Refiero al lector a la Nota D para obtener una explicación respecto a la naturaleza y notación de dichas tablas).

Son necesarios seis datos numéricos, en este caso, para hacer las combinaciones requeridas. Estos datos son 1, 2,  $n(=4)$ ,  $B_1$ ,  $B_3$ ,  $B_5$ . Cuando  $n=5$ , haría falta el dato adicional  $B_7$ . Cuando  $n=6$ , haría falta el dato  $B_9$ ; etcétera. Así, el número de datos necesarios siempre será  $n+2$  para  $n=n$ ; y de estos  $n+2$  datos,  $(\overline{n+2} - 3)$  de ellos son números de Bernoulli sucesivos. La razón por la que se están colocando los números de Bernoulli usados como datos en las columnas de Resultado del diagrama es que podemos suponer que ya han sido calculados previamente en sucesión por la propia máquina; en esta circunstancia, cada B aparecerá como resultado antes de usarse como dato para calcular el siguiente B. Por tanto, aquí tenemos un ejemplo (del tipo mencionado en la Nota D) de la misma Variable realizando más de una función a la vez. Es cierto que, si consideramos que nuestro cálculo de  $B_7$  es un cálculo completamente aislado, podemos concluir que  $B_1$ ,  $B_3$ ,  $B_5$  se han colocado arbitrariamente en las columnas; y entonces sería más consistente ponerlos en  $V_4$ ,  $V_5$ ,  $V_6$  como datos y no como resultados. Pero no vamos a considerarlo así. Al contrario, supondremos que la máquina estará en el proceso de calcular los números hasta un punto indeterminado desde el mismo principio; y que simplemente estamos seleccionando, mediante un ejemplo, un cálculo entre la serie sucesiva pero distinta de cálculos que está realizando. Cuando los B son fraccionarios, debe entenderse que se calculan y aparecen en la notación de fracciones decimales. De hecho, hay que ser conscientes de esta circunstancia para todos los cálculos. En cualquiera de los ejemplos ya expuestos en la traducción y en las Notas, algunos datos, y también algunos

resultados temporales o permanentes, pueden ser fraccionarios con igual probabilidad que números enteros. Pero la configuración es tal modo que la naturaleza de los procesos sería igual que con los números enteros.

En la tabla y diagrama anterior no estamos considerando el signo de ninguno de los B, solamente su magnitud numérica. La máquina arrojaría correctamente el signo para todos ellos correctamente, pero no podemos entrar en todo detalle adicional de este tipo como querríamos. Por lo tanto, los círculos para el signo que hay en el diagrama se dejan en intencionalmente en blanco.

Las tarjetas de Operación 1, 2, 3, 4, 5, 6 preparan  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$ . Así, la Tarjeta 1 multiplica dos por  $n$ , y las tres tarjetas Variable de Recepción, que pertenecen a  $V_4$ ,  $V_5$ ,  $V_6$ , respectivamente, permiten que el resultado  $2n$  se coloque en cada una de estas últimas columnas (esto es un caso en el que hace falta una recepción triple de resultados para propósitos posteriores); vemos que los índices superiores de las dos Variables utilizadas durante la Operación 1 quedan inalterados.

No vamos a revisar los detalles de cada operación, ya que la tabla y el diagrama los especifican suficientemente; solo advertiremos algunos casos peculiares.

En la Operación 6, se convierte en una cantidad positiva en una cantidad negativa, simplemente restándole dicha cantidad a una columna que contiene un cero. (El signo encima de  $V_8$  se convertiría en —durante este proceso).

Las Tarjetas 8, 9, 10 preparan  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \frac{2n}{2}$ . En la Operación 9 vemos un ejemplo de un índice superior que de nuevo vuelve a tener un valor, después de haber pasado desde valores previos hasta cero.  $V_{11}$  ha sido, sucesivamente,  $^0V_{11}$ ,  $^1V_{11}$ ,  $^2V_{11}$ ,  $^0V_{11}$ ,  $^3V_{11}$ ; y por la naturaleza de la función que tiene  $V_{11}$  en el cálculo, su índice seguirá pasando por más cambios adicionales; si los